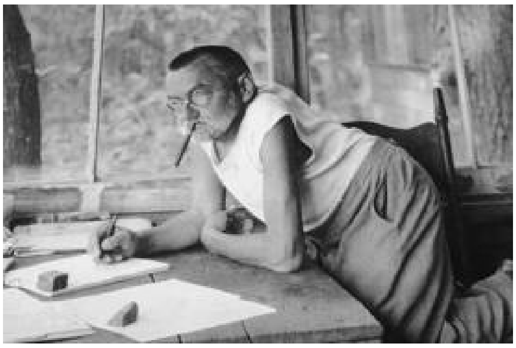
CIRCUITOS ELECTRICOS Y REDES

CORRIENTE ALTERNA:

Introducción
Intensidad de corriente y tensión senoidal
Ángulo de fase
Valores medio y eficaz
Impedancia compleja y notación fasorial

4° B – ELECTRÓNICA

2012



Karl August Rudolf Steinmetz

Matemático e ingeniero eléctrico alemán nacionalizado estadounidense cuyos estudios sobre corriente alterna facilitaron la utilización de este tipo de corriente de forma industrial.

Nacido en el año 1865, en la ciudad de *Breslau* (Alemania). Karl August Rudolf Steinmetz padecía una deformidad física, lo que lo hizo refugiarse, en su juventud, en los libros de texto, donde demostró una inusual habilidad en matemáticas, física y literatura clásica. Tras graduarse con todos los honores en el *Gymnasium* de su localidad ingresó en la *Universidad de Breslau* en 1883, donde inició cierta actividad política en un club de estudiantes socialistas que más tarde se asoció al *Partido Socialdemócrata Alemán*.

Al efectuarse una redada en la que fueron capturados varios de sus camaradas, se hizo cargo de la dirección del periódico del partido, *La Voz del Pueblo*, cuyos editoriales fueron calificados de incendiarios por las autoridades e irritaron a la policía hasta el punto en que Steinmetz se vio obligado a abandonar el país.

Tras una breve estancia en *Zürich* emigró a Estados Unidos como polizón en un carguero, y al poco de llegar obtuvo un empleo en una pequeña compañía eléctrica, propiedad de su compatriota *Rudolf Eickemeyer* y situada en *Yonkers*, en el estado de Nueva York. Al lograr la nacionalidad estadounidense americanizó su nombre e introdujo como segundo el nombre de guerra de sus tiempos socialistas, aquel con el que firmaba los cáusticos editoriales.

En dicha empresa, y con la bendición de su patrón, montó un pequeño laboratorio en el que realizó la mayor parte de sus descubrimientos, entre los que se encuentra el estudio del fenómeno de histéresis en electroimanes (1892), fenómeno que da lugar a pérdidas de energía en forma de calor. Su estudio permitía que los ingenieros eléctricos diseñaran adecuadamente cada electroimán conociendo de antemano cuáles eran sus pérdidas energéticas, notable avance si se piensa que con anterioridad tan sólo era posible medir las pérdidas una vez construido el aparato.

Un año más tarde, cuando la compañía fue absorbida por la *General Electric Co.*, logró que se respetara su puesto y su laboratorio, y desarrolló una teoría matemática que permitía los cálculos en circuitos de corriente alterna, lo que facilitó que se cambiaran las redes eléctricas de corriente continua existentes anteriormente por la mucho más barata y fácilmente conducible corriente alterna. Falleció en el año 1923 en *Schenectady* (N.Y).

.

1. INTRODUCCIÓN

Al aplicar las leyes de Kirchhoff a un circuito cualquiera de una malla el resultado es, en general, una ecuación diferencial. Los métodos de resolución clásicos de ecuaciones diferenciales proporcionan la solución del problema eléctrico. Ahora bien, la intensidad de corriente, que suele ser la incógnita, debida a una determinada tensión aplicada, viene dada por una suma de dos funciones. Una de ellas corresponde a la intensidad del régimen transitorio que, normalmente, se anula a las pocas fracciones de segundo, y la otra constituye la intensidad en régimen permanente, la cual perdura mientras existe la excitación.

El análisis de circuitos en régimen permanente senoidal tiene una gran importancia no solo porque las tensiones que suministran los generadores son, muy aproximadamente, funciones senoidales del tiempo, sino porque cualquier forma de onda periódica se puede sustituir por un término constante y una serie de términos de senos y cosenos. Se trata del método de Fourier de análisis de formas de onda.

2. INTENSIDAD DE CORRIENTE Y TENSIÓN SENOIDAL

En la siguiente tabla aparecen las tensiones en bornes de los tres elementos *R*, *L* y *C* puros en el caso de que la corriente que circule por ellos sea de tipo senoidal.

Elemento	Tensión para *i* general	Tensión para $\boldsymbol{i = I_m.sen(\omega.t)}$
Resistencia	$v_R = R.i$	$v_R = R.I_m.sen(\omega.t)$
Bobina	$v_L = L.\frac{di}{dt}$	$v_L = \omega.L.I_m.\cos(\omega.t)$
Capacitor	$v_C = \frac{1}{C}\int i.dt$	$v_C = \frac{I_m}{\omega.C}.[-\cos(\omega.t)]$

En la siguiente tabla aparecen las intensidades de corriente por los tres elementos *R*, *L* y *C* puros en el caso de que la tensión aplicada a cada uno de ellos sea de tipo senoidal.

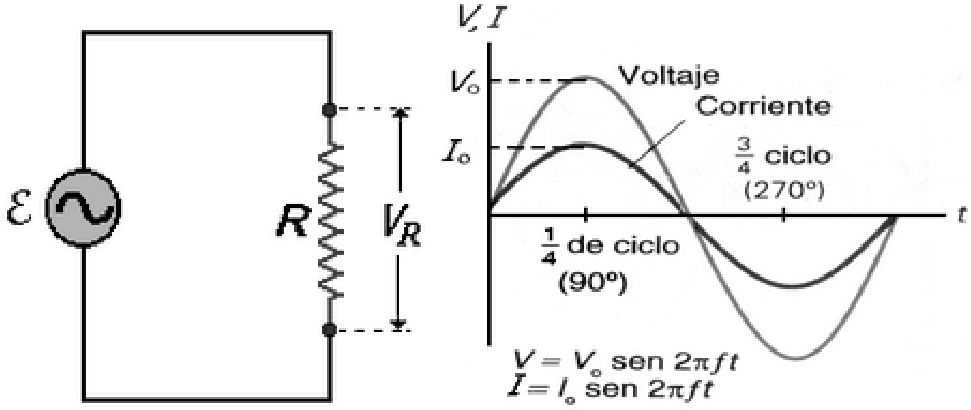
Elemento	Tensión para *i* general	Tensión para $\boldsymbol{v = V_m.sen(\omega.t)}$
Resistencia	$i_R = \frac{v}{R}$	$i_R = \frac{V_m}{R}.sen(\omega.t)$
Bobina	$i_L = \frac{1}{L}\int v.dt$	$i_L = \frac{V_m}{\omega.L}[-\cos(\omega.t)]$
Capacitor	$i_C = C.\frac{dv}{dt}$	$i_C = \omega.C.V_m.\cos(\omega.t)$

3. ÁNGULO DE FASE

Si tanto la tensión como la corriente son funciones senoidales del tiempo y se representan gráficamente con la misma escala de tiempos, aparece un desplazamiento relativo entre ambas magnitudes que solo es nulo en el caso de tratarse de un elemento resistivo puro. Dicho desplazamiento es el ángulo de fase y nunca puede ser superior a 90° o π/2 radianes. Por convenio, al hablar del ángulo de fase se considera el que forma la corriente con la tensión. En un capacitor, por ejemplo, la corriente adelanta 90° o π/2 radianes a la tensión; en un circuito serie RL, con R igual a ω.L, la tensión adelanta 45° o π/4 radianes a la corriente (o bien la corriente está retrasada 45° respecto de la tensión); en un resistencia pura, la corriente está en fase con la tensión, etc.

3.1 CIRCUITO RESISTIVO PURO

En un circuito resistivo puro la intensidad de corriente y la tensión están en fase.



$$i_R(t) = \frac{v(t)}{R} = \frac{V_o}{R}.sen(\omega.t) = G.V_o.se\,n(\omega.t) = I_o.sen(\omega.t)$$

V_o valor pico o máximo de *v(t)*.

I_o = G.V_o = V_o/R valor pico de la $i_R(t)$.

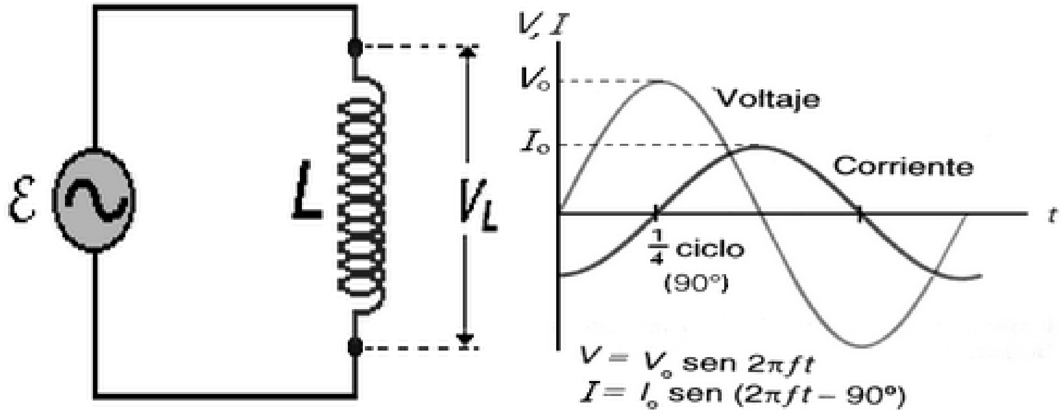
G = 1/R [S] conductancia.

ω = 2.π.f [rad/seg] frecuencia angular.

En un circuito resistivo puro la respuesta siempre tiene igual forma de onda que la excitación, además, si la excitación es senoidal, la respuesta está en fase.

3.2 CIRCUITO INDUCTIVO PURO

En un circuito inductivo puro la intensidad de corriente retrasa 90° o π/2 rad. respecto de la tensión.



$$v_L(t) = L.\frac{di(t)}{dt}$$

$$i_L(t) = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} v(t).dt = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{0} v(t).dt + \frac{1}{L}\int_{0}^{t} v(t).dt$$

$$i_L(t) = i_L(0) + \frac{1}{L}\int_{0}^{t} v(t).dt = i_L(0) + \frac{1}{L}\int_{0}^{t} V_o.sen(\omega.t).dt$$

$$i_L(t) = i_L(0) - \frac{V_o}{\omega.L}.\cos(\omega.t)$$

$i_L(0)$ es la corriente que circula por la bobina en ***t=0*** (corriente inicial). Si suponemos ***$i_L(0)=0$***, tenemos que:

$$i_L(t) = -\frac{V_o}{\omega.L}.\cos(\omega.t) = -\frac{V_o}{X_L}.\cos(\omega.t) = I_o.sen(\omega.t - \frac{\pi}{2})$$

X_L reactancia inductiva [Ω].

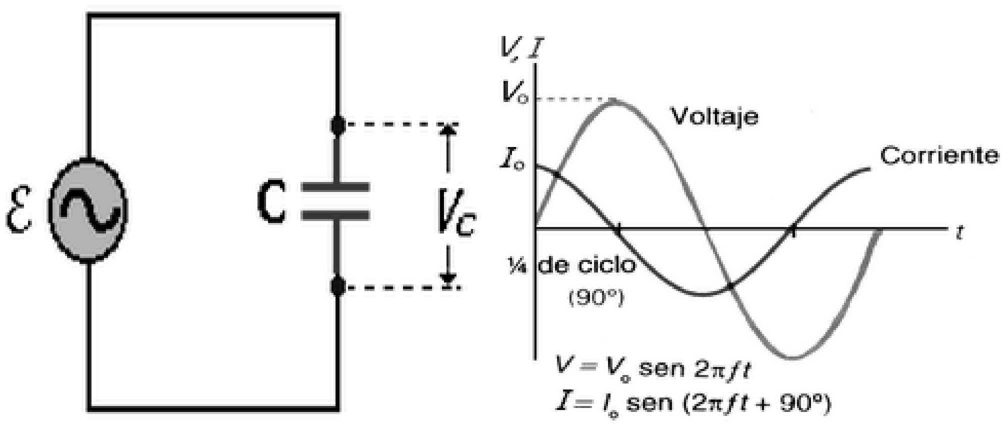
ω = 2.π.f [rad/seg] frecuencia angular.

En un circuito inductivo puro con excitación senoidal, la corriente está atrasada 90° con respecto a la tensión a los bornes de la bobina, siendo ambas de igual forma de onda.

X_L es un factor de proporcionalidad entre excitación y respuesta. Si L es constante, un cambio de frecuencia de la excitación hace variar X_L y en consecuencia el valor máximo de la respuesta.

3.3 CIRCUITO CAPACITIVO PURO

En un circuito capacitivo puro la intensidad de corriente adelanta 90° o π/2 rad. respecto de la tensión.



$$v_C(t) = \frac{1}{C}.\int i(t).dt$$

$$i_C(t) = C.\frac{dv(t)}{dt} = C.\frac{d}{dt}[V_o.sen(\omega.t)] = \omega.C.V_o.\cos(\omega.t)$$

$$i_C(t) = \omega.C.V_o.\cos(\omega.t) = \omega.C.V_o.sen\left(\omega.t + \frac{\pi}{2}\right) = I_o.sen(\omega.t + \frac{\pi}{2})$$

B_C = ω.C susceptancia capacitiva [S].

ω = 2.π.f [rad/seg] frecuencia angular.

X_C = 1 / ω.C reactancia capacititva [Ω].

En un circuito capacitivo puro con excitación senoidal, la corriente está adelantada 90° con respecto a la tensión a los bornes del capacitor, siendo ambas de igual forma de onda.

Tanto X_C como B_C son factores de proporcionalidad entre los valores máximos de tensión y corriente en un circuito capacitivo. Al variar la frecuencia de excitación la B_C varía en forma lineal y la X_C lo hace hiperbólicamente.

4. VALORES MEDIO Y EFICAZ

4.1 VALOR MEDIO

El valor medio **Y_{med}** de una función periódica *y(t)* de periodo T es, por definición:

$$Y_{med} = \frac{1}{T}\int_0^T y(t).\,dt$$

4.2 VALOR EFICAZ

Al circular una corriente de intensidad *i(t)* por un elemento resistivo puro de resistencia R, éste disipa una potencia *p(t)* con un valor medio P. Pues bien, esta misma potencia P la puede disipar una corriente constante de intensidad I circulando por dicha R. En estas condiciones, diremos que *i(t)* tiene un valor eficaz **I_{ef}** equivalente a la corriente constante I. Lo mismo diríamos respecto de la tensión eficaz **V_{ef}**. Matemáticamente, dada la función *y(t)* de periodo T, su valor eficaz (o raíz cuadrática media) es, por definición,

$$Yef = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T y^2(t).\,dt}$$

El valor eficaz de las funciones *a.sen(ω.t)* y *a.cos(ω.t)* durante un período es $^{a}/_{\sqrt{2}}$

4.3 FACTOR DE FORMA

El factor de forma de una onda es la relación entre los valores eficaz y medio de la misma.

$$Factor\ de\ forma = \frac{Y_{ef}}{Y_{med}} = \frac{\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T y^2(t).\,dt}}{\frac{1}{T}\int_0^T y(t).\,dt}$$

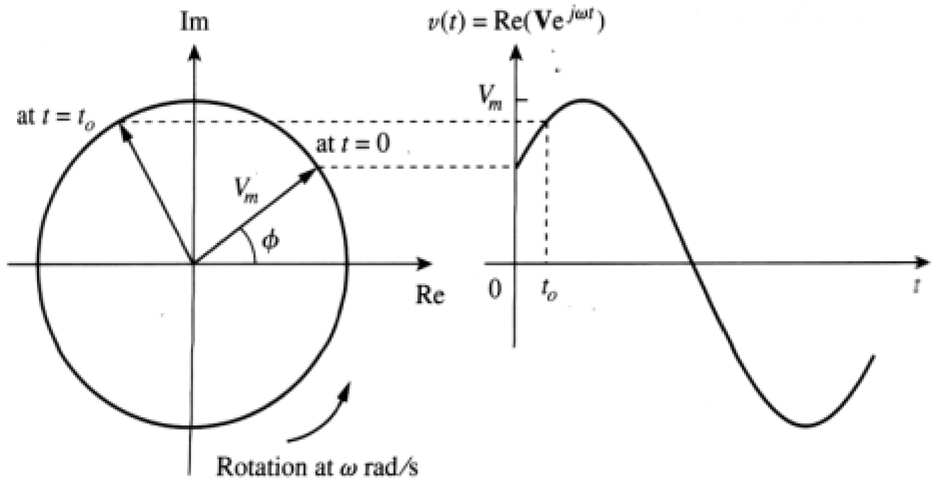
Aquellas formas de onda cuyos semiperiodos son simétricos con respecto al eje de los tiempos, tienen un valor medio igual a cero. Para salvar la dificultad en este tipo de ondas, de las que la función seno es el ejemplo más característico, se suele tomar el valor medio del semiperiodo positivo. Este valor se llama valor medio de un semiciclo.

5. IMPEDANCIA COMPLEJA Y NOTACIÓN FASORIAL

Las señales senoidales se expresan fácilmente en términos de fasores, los cuales son más convenientes para trabajar con las funciones seno y coseno. Un fasor es un número complejo que representa una senoide en amplitud y fase. Los fasores proporcionan un medio simple para analizar los circuitos lineales excitados por fuentes senoidales; en otro caso, las soluciones de tales circuitos serían inmanejables.

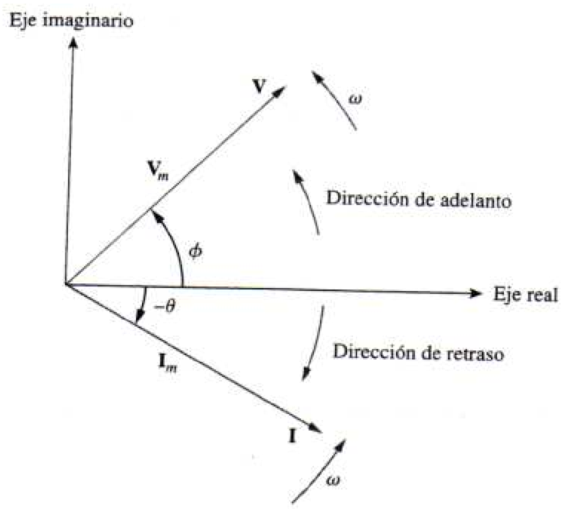
5.1 NOTACIÓN FASORIAL

Consideremos la función tensión $v(t)=V.e^{j\omega t}$. Representa un número complejo (identidad de Euler) que depende del tiempo, sin embargo, su módulo es constante e igual a V. A continuación se realiza la proyección sobre el eje imaginario, como función del tiempo del segmento giratorio.



En efecto, para ω constante, el segmento gira en sentido contrario al de las agujas del reloj con velocidad angular constante. Si observamos las proyecciones de este segmento giratorio sobre los ejes real e imaginario, veremos que coinciden con los términos coseno y seno, respectivamente, de $e^{j\omega t}$ dados por la fórmula de Euler.

Anteriormente vimos que por un circuito serie RL al que se le aplica una tensión $v(t)=V_m.sen(\omega.t+\Phi)$ circula una corriente $i(t)=I_m.sen(\omega.t-\theta)$ que está retrasada un ángulo $(\Phi+\theta)$ respecto de la tensión. Este ángulo de fase depende de las constantes del circuito y de la frecuencia de la tensión aplicada, pero nunca puede ser mayor de 90° o π/2 radianes. En la siguiente figura se muestra un par de segmentos dirigidos que giran en el plano complejo en sentido contrario al de las agujas del reloj con velocidad angular constante ω. Como los dos tienen la misma velocidad, el ángulo que forman, o fase, permanece constante. Además, por el sentido de giro se deduce que la corriente está retrasada respecto de la tensión. Tal representación gráfica de fasores se conoce como **diagrama fasorial**.



Consideremos ahora que a un circuito con una Z = z.e$^{j\theta}$ se le aplica la siguiente excitación mediante una fuente externa:

$$v(t) = V_o.\cos(\omega.t + \emptyset) = Re\left[V_o.e^{j(\omega.t+\emptyset)}\right]$$

Donde Φ es el ángulo de fase inicial para t = 0.

En estas circunstancias la corriente circulante en el circuito sería:

$$i(t) = \frac{V_o.e^{j(\omega.t+\emptyset)}}{z.e^{j\theta}} = \left(\frac{V_o}{z}\right).e^{j(\omega.t+\emptyset-\theta)} = I_o.e^{j(\omega.t+\emptyset-\theta)}$$

La expresión anterior está en el dominio del tiempo ya que éste aparece implícitamente en la expresión, pudiendo representarse mediante fasores giratorios. Multiplicando la ecuación anterior por e$^{-j\omega t}$ a los efectos de eliminar el tiempo de la misma, la expresión quedará de la siguiente manera:

$$e^{-j\omega.t}.\frac{V_o.e^{j(\omega.t+\emptyset)}}{z.e^{j\theta}} = e^{-j\omega.t}.\left(I_o.e^{j(\omega.t+\emptyset-\theta)}\right)$$

$$\frac{V_o.e^{j\emptyset}}{z.e^{j\theta}} = I_o.e^{j(\emptyset-\theta)}$$

La ecuación anterior es la transformada al dominio de la frecuencia, ya que es evidente que en ella no aparece el tiempo, donde

$$V_o.e^{j\emptyset} = \frac{V_o}{\sqrt{2}}\angle\emptyset = V_{ef}\angle\emptyset$$

se denomina fasor representativo de la tensión, y no es un fasor giratorio ya que en él no intervienen la variable tiempo. De igual manera

$$I_o.e^{j(\emptyset-\theta)} = \frac{I_o}{\sqrt{2}}\angle(\emptyset-\theta) = I_{ef}\angle(\emptyset-\theta)$$

se denomina fasor representativo de la corriente, y tampoco es un fasor giratorio. En ésta expresión se resalta perfectamente que se está trabajando en el dominio de la frecuencia, ya que el ángulo θ de la impedancia depende de la frecuencia y en consecuencia también depende de ella la corriente.

De lo visto, surge que podríamos representar a la impedancia de un circuito, definiéndola como la relación entre los fasores de tensión y de corriente.

$$Z = \frac{V_{ef}}{I_{ef}}$$

La expresión anterior relaciona las magnitudes complejas V_{ef}, Z e I_{ef}, en consecuencia deben considerarse a las mismas con su módulo y argumento.

La ecuación anterior es el equivalente fasorial de la ley de Ohm, por lo que comúnmente se la denomina forma compleja o forma vectorial de la ley de Ohm. Es necesario destacar que tanto V_{ef} como I_{ef} no son voltaje ni corriente, solamente son fasores representativos de las mismas, ya que los voltajes y las corrientes son funciones reales del tiempo, mientras que V_{ef} e I_{ef} no son magnitudes reales y solo dependen de la frecuencia.

Finalmente, se debe tener presente que un análisis fasorial se aplica sólo cuando la frecuencia es constante; esto se aplica al manipular dos o más señales senoidales de la misma frecuencia.

5.2 IMPEDANCIA COMPLEJA

Ahora se sabe representar un voltaje o una corriente en el dominio fasorial o de frecuencia, ¿cómo se aplica esto a los circuitos que involucran los elementos pasivos R, L y C? Lo que se necesita hacer es transformar la relación voltaje-corriente del dominio tiempo, al dominio de frecuencia para cada elemento.

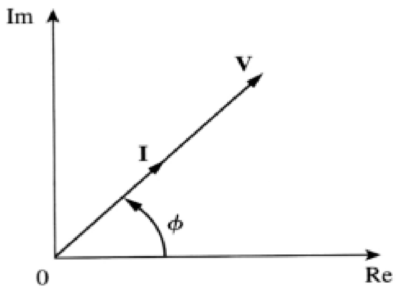
Iniciando con la resistencia. Si la corriente a través de una resistencia R es $i(t)=I_o.cos(\omega.t+\Phi)$, el voltaje a través de ella está dada por ley de Ohm como:

$$v(t) = i(t).R = R.I_o.\cos(\omega.t + \emptyset)$$

La forma fasorial de este voltaje es:

$$V = R.I_{ef}\angle\emptyset$$

El diagrama fasorial para un circuito resistivo puro es el siguiente:



Para un inductor L, si la corriente a través de ella es $i(t)=I_o.cos(\omega.t+\Phi)$, el voltaje a través del inductor es:

$$v(t) = L.\frac{di}{dt} = -\omega.L.I_o.sen\,(\omega.t + \emptyset)$$

Utilizando la identidad trigonométrica,

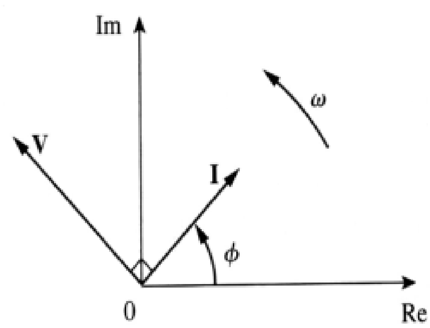
$$-senA = \cos(A + 90°)$$

$$v(t) = \omega.L.I_o.cos\,(\omega.t + \emptyset + 90°)$$

La ecuación anterior se convierte a notación fasorial y se obtiene

$$V = j\omega.L.I_{ef}\angle\emptyset = jX_L.I_{ef}\angle\emptyset$$

Donde $\mathbf{X_L}$ se denomina **reactancia inductiva** y su unidad es el Ohm [Ω]. La ecuación anterior muestra que la tensión tiene una magnitud de $\omega.L.I_{ef}$ y una fase Φ + 90°. El voltaje y la corriente están 90° fuera de fase. Específicamente la corriente atrasa 90° respecto de la tensión. En la siguiente figura se observa el diagrama fasorial de tensión-corriente para un circuito inductivo puro.



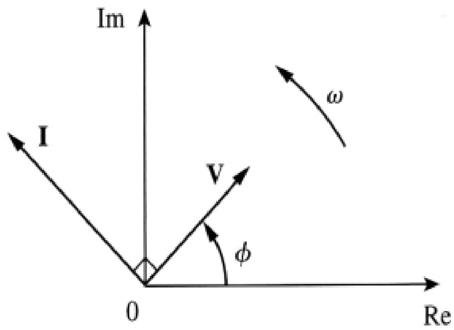
Para un capacitor C, suponga que el voltaje en terminales *v(t)=V₀.cos(ω.t+Φ)*. La corriente a través del capacitor es:

$$i(t) = C.\frac{dv}{dt}$$

Siguiendo el mismo desarrollo que se realizó para un inductor, se obtiene:

$$V_C = \frac{I_{ef}\angle\emptyset}{j\omega.C} = \frac{1}{j\omega.C}.I_{ef}\angle\emptyset = j.X_C.I_{ef}\angle\emptyset$$

Donde $\mathbf{X_C}$ se denomina **reactancia capacitiva** y su unidad es el Ohm [Ω]. El voltaje y la corriente están 90° fuera de fase. Específicamente la corriente adelanta 90° respecto de la tensión. En la siguiente figura se observa el diagrama fasorial de tensión-corriente para un circuito capacitivo puro.



5.3 IMPEDANCIA Y ADMITANCIA

De las expresiones anteriores se deduce que la impedancia es una magnitud compleja, por lo que genéricamente se expresa de la siguiente manera:

$$Z(j\omega) = Re[Z(j\omega)] + jIm[Z(j\omega)]$$

La parte imaginaria de la impedancia compleja se denomina reactancia y se representa con la letra X, siendo el Ω (ohm) su unidad de medida. De los cálculos anteriores surgen las siguientes expresiones:

$$Z_L(j\omega) = j\omega.L = jX_L$$

Donde $\mathbf{X_L}$ se denomina **reactancia inductiva**.

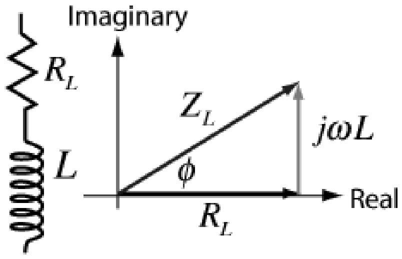
$$Z_C(j\omega) = -j\frac{1}{\omega.C} = -jX_C$$

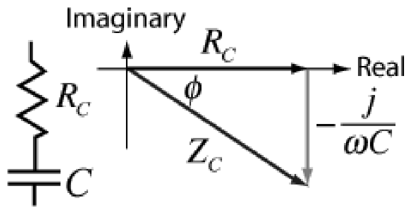
Donde $\mathbf{X_C}$ se denomina **reactancia capacitiva**.

La parte real de la impedancia compleja se denomina resistencia del circuito y se utiliza para simbolizarla la letra R, y su unidad de medida es el Ω (ohm) y no depende de la frecuencia de la fuente con que se excita al circuito.

$$Z(j\omega) = R + j\left[\omega.L - \frac{1}{\omega.C}\right] = R + j[X_L - X_C]$$

Como la impedancia es un número complejo, se la puede representar por un punto en el plano complejo en una grafica denominada **diagrama de impedancias**.





A la R le corresponde un punto sobre el eje real positivo ya que la resistencia no puede ser negativa. La X_L se representa por un punto sobre el eje imaginario positivo y X_C por un punto sobre el eje imaginario negativo. En general, la impedancia compleja está ubicada en el primer o en el cuarto cuadrante, dependiendo ello de los elementos que conforman el circuito analizado.

El ángulo θ varía entre 90° (π/2 rad.) para un circuito inductivo puro y -90° (- π/2 rad.) para un circuito capacitivo puro. De lo dicho se deduce que los circuitos inductivos y capacitivos puros solamente tienen reactancia, mientras que los resistivos puros solamente tienen resistencia.

La reciproca de la impedancia compleja se denomina **admitancia compleja** y se representa por la letra **Y** cuya expresión es la siguiente:

$$Y(j\omega) = \frac{1}{Z(j\omega)} = Re[Y(j\omega)] + jIm[Y(j\omega)]$$

La parte imaginaria de la admitancia compleja se denomina **susceptancia** y se utiliza la letra **B** para representarla y su unidad de medida es el Siemens [S = Ω^{-1}].

$$Y_L(j\omega) = \frac{1}{Z_L(j\omega)} = \frac{1}{j\omega.L} = -j\frac{1}{\omega.L} = -jB_L$$

Donde $\mathbf{B_L}$ se denomina **susceptancia inductiva**.

$$Y_C(j\omega) = \frac{1}{Z_C(j\omega)} = \frac{1}{-j\dfrac{1}{\omega.C}} = j\omega.C = jB_C$$

Donde $\mathbf{B_C}$ se denomina **susceptancia capacitiva**.

Las susceptancias son función de la frecuencia de la fuente de excitación aplicada. La parte real de la admitancia se denomina **conductancia** y se representa con la letra **G** y su unidad de medida es el Siemens [S = Ω^{-1}].

$$Y(j\omega) = G + j\left[\omega.C - \frac{1}{\omega.L}\right] = G + j[B_C - B_L]$$

5.4 RELACIÓN ENTRE LAS IMPEDANCIAS Y LAS ADMITANCIAS

$$Y(j\omega) = \frac{1}{Z(j\omega)} = G + jB = \frac{1}{R + jX} = \frac{R - jX}{R^2 + X^2}$$

De la ecuación anterior se deducen las siguientes igualdades:

$$G = \frac{R}{R^2 + X^2}$$

$$B = \frac{-X}{R^2 + X^2}$$

Conociendo las componentes de Z, a partir de las ecuaciones anteriores pueden encontrarse cada una de las componentes de la admitancia.

Es necesario destacar que G no es la recíproca de R a menos que el circuito resistivo puro (X = 0) en cuyo caso G = 1/R.

Igualmente B no es la recíproca de X a menos que R = 0. De manera similar, se obtienen las siguientes relaciones:

$$Z(j\omega) = R + jX = \frac{1}{Y(j\omega)} = \frac{1}{G + jB} = \frac{G - jB}{G^2 + B^2}$$

De la ecuación anterior se deducen las siguientes igualdades:

$$R = \frac{G}{G^2 + B^2}$$

$$X = \frac{-B}{G^2 + B^2}$$