# CIRCUITOS ELECTRICOS Y REDES

## NÚMEROS COMPLEJOS:

### Forma binómica
### Representación de un número complejo
### Forma polar
### Operaciones aritméticas
### Uso de la calculadora

**4° B – ELECTRÓNICA**

**2013**

**Karl Friedrich Gauss**

Matemático, físico y astrónomo alemán. Nacido en el año 1777 en la ciudad de Brunswick (actual Alemania). Proviene del seno de una familia humilde y desde muy temprana edad Karl Friedrich Gauss dio muestras de una prodigiosa capacidad para las matemáticas (según la leyenda, a los tres años interrumpió a su padre cuando estaba ocupado en la contabilidad de su negocio para indicarle un error de cálculo), hasta el punto de ser recomendado al duque de Brunswick por sus profesores de la escuela primaria.

El duque le proporcionó asistencia financiera en sus estudios secundarios y universitarios, que efectuó en la Universidad de Gotinga entre 1795 y 1798. Su tesis doctoral (1799) versó sobre el teorema fundamental del álgebra (que establece que toda ecuación algebraica de coeficientes complejos tiene soluciones igualmente complejas), que Gauss demostró.

En 1801 Gauss publicó una obra destinada a influir de forma decisiva en la conformación de la matemática del resto del siglo, y particularmente en el ámbito de la teoría de números, las *Disquisiciones aritméticas*, entre cuyos numerosos hallazgos cabe destacar: la primera prueba de la ley de la reciprocidad cuadrática; una solución algebraica al problema de cómo determinar si un polígono regular de n lados puede ser construido de manera geométrica (sin resolver desde los tiempos de Euclides); un tratamiento exhaustivo de la teoría de los números congruentes; y numerosos resultados con números y funciones de variable compleja (que volvería a tratar en 1831, describiendo el modo exacto de desarrollar una teoría completa sobre los mismos a partir de sus representaciones en el plano x, y) que marcaron el punto de partida de la moderna teoría de los números algebraicos.

Su fama como matemático creció considerablemente ese mismo año, cuando fue capaz de predecir con exactitud el comportamiento orbital del asteroide Ceres, avistado por primera vez pocos meses antes, para lo cual empleó el método de los mínimos cuadrados, desarrollado por él mismo en 1794 y aún hoy día la base computacional de modernas herramientas de estimación astronómica.

En 1807 aceptó el puesto de profesor de astronomía en el Observatorio de Gotinga, cargo en el que permaneció toda su vida. Dos años más tarde, su primera esposa, con quien había contraído matrimonio en 1805, falleció al dar a luz a su tercer hijo; más tarde se casó en segundas nupcias y tuvo tres hijos más. En esos años Gauss maduró sus ideas sobre geometría no euclidiana, esto es, la construcción de una geometría lógicamente coherente que prescindiera del postulado de Euclides de las paralelas; aunque no publicó sus conclusiones, se adelantó en más de treinta años a los trabajos posteriores de Lobachewski y Bolyai.

Falleció en el año 1855 en *Gotinga* (actual Alemania).

.

# 1. LOS NÚMEROS REALES

El sistema numérico, como nosotros lo conocemos en la actualidad, es el resultado de una evolución gradual en la historia de las Matemáticas. Describimos brevemente los tipos de números que la humanidad ha ido desarrollando.

Los números naturales: 1, 2, 3,...., o también llamados enteros positivos. Fueron usados primero para contar. Los símbolos han cambiado con las épocas, pues los romanos, por ejemplo, utilizaban I, II, III, IV,… La suma, A + B, y el producto, A . B de dos números naturales son también números naturales, lo cual se puede expresar diciendo que el conjunto de los números naturales es cerrado respecto a las operaciones de suma y producto o que cumple la propiedad de clausura con relación a estas operaciones.

Los enteros negativos y el cero, después denotados por -1, -2, -3… y 0, respectivamente, que permiten resolver ecuaciones como X + B = A con A y B naturales, llevan a la operación de resta, que se escribe X = A - B. El conjunto de enteros positivos y negativos con el cero se llama el conjunto de los enteros y es cerrado bajo las operaciones de suma, producto y resta.

Los números racionales o fracciones, tales como 3/4, -8/3,... permiten resolver ecuaciones de la forma B.X = A para enteros cualesquiera A y B, con 0 ≠ B, los cuales conducen a la operación de división o inversa del producto, que se representa como X = A/B (llamado cociente de A y B) donde A es el numerador y B el denominador.

El conjunto de los enteros es un subconjunto de los números racionales, puesto que los enteros corresponden a los números racionales con B = 1.

El conjunto de números racionales es cerrado bajo las operaciones de suma, sustracción, multiplicación y división, excluyendo la división por cero.

Los números irracionales, tales como $\sqrt{2}$ = 1,41423… y π = 3,14159… son números que no son racionales, es decir, no pueden ser expresados como A/B donde A y B son enteros y B ≠ 0.

El conjunto de números racionales e irracionales es llamado el conjunto de los números reales. Se supone que el estudiante está ya familiarizado con las diversas operaciones con números reales.

Es conocido que los números reales pueden representarse por puntos de una recta infinita que llamamos eje o recta real. El punto correspondiente al cero, se llama origen.

El valor absoluto de un número real A, denotado por |A| es igual a A si A > 0, a -A si A < 0 y a 0 si A = 0. La distancia entre dos puntos A y B sobre el eje real es |A – B|.

# 2. LOS NÚMEROS COMPLEJOS

En el campo de los números reales existen algunas operaciones prohibidas como las raíces de orden par de los números negativos, los logaritmos de los números negativos, etc.

Para superar estas limitaciones se introducen los *números imaginarios*, empezando por la unidad imaginaria j[1] que se define como un número tal que elevado al cuadrado es igual a -1.

En cuanto a la representación gráfica, deberemos salirnos de la recta, puesto que hemos visto que hay correspondencia biunívoca entre los puntos de una recta y los números reales. No siendo j un número real, no puede estar representado por un punto de la recta.

Pero, puesto que $j^2 = j.j = -1 = 1.(-1)$, podemos considerar que una doble multiplicación por j hace pasar del punto 1 al -1, es decir que hace girar 180° a la unidad. Cabe admitir entonces que j hace girar 90° a la unidad. Esto es un indicio de porqué se representa j sobre una recta perpendicular a la recta que se ha utilizado para representar a los números reales.

[1] En los libros de matemática se utiliza la letra *i* como unidad imaginaria, pero en nuestro caso en particular utilizaremos la letra *j* para evitar confusiones con el símbolo de corriente eléctrica.

A los números jy, donde y es un número real cualquiera, se les llama números imaginarios y a los binomios del tipo x + jy, con x e y reales, se los llama números complejos. Estos números contienen como casos particulares a los números reales (y = 0) y a los números imaginarios (x = 0). Si x = y = 0, se tiene el cero.

Se define un número complejo, z, mediante la siguiente expresión:

$$z = x + jy$$

Llamamos j a la unidad imaginaria compleja. Definimos a j de la siguiente manera:

$$j^2 = -1$$

Tengamos en cuenta que:

$$j^3 = j^2.j = -j$$
$$j^4 = j^2.j^2 = 1$$
$$j^5 = j$$

Dos números complejos a + jb y c + jd son iguales si y solamente si a = c y b = d. Podemos considerar los números reales como el subconjunto del conjunto de los números complejos con

b = 0. En este caso por ejemplo, los números complejos 0 + j0 y -3 + j0 representan los números reales 0 y –3, respectivamente. Si a = 0, el número complejo 0 + jb se llama un número imaginario puro.

El conjugado de un número complejo a + jb es a - jb. El conjugado de un número complejo z se indica frecuentemente por z*.

## 2.1 OPERACIONES ARITMÉTICAS CON NÚMEROS COMPLEJOS EN FORMA BINÓMICA

1. **Suma:**

$$(a + jb) + (c + jd) = (a + c) + j(b + d)$$

2. **Resta:**

$$(a + jb) - (c + jd) = (a - c) + j(b - d)$$

3. **Producto:**

$$(a + jb).(c + jd) = a.c + ja.d + jb.c + j^2 b.d = (a.c - bd) + j(a.d + b.c)$$

4. **Cociente:**

$$\frac{(a + jb)}{(c + jd)} = \frac{(a + jb)}{(c + jd)}.\frac{(c - jd)}{(c - jd)} = \frac{a.c - ja.d + jb.c - j^2 b.d}{c^2 - j^2.d^2}$$
$$= \frac{(a.c + b.d) + j(b.c - a.d)}{c^2 + d^2} = \frac{a.c + b.d}{c^2 + d^2} + j\frac{b.c - a.d}{c^2 + d^2}$$

## 2.2 REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS

Si se eligen ejes reales sobre dos rectas perpendiculares (los ejes x e y, respectivamente), podemos situar cualquier punto del plano determinado por estas rectas mediante la pareja ordenada de números reales (x,y), o coordenadas cartesianas del punto. Como un número complejo x+jy se puede considerar como una pareja ordenada de números reales, podemos representar estos números por puntos en el plano x-y, llamado el plano complejo o plano de Argand en honor a su creador, el matemático francés *Jean Robert Argand*. Por ejemplo, el número complejo 3+j4 también se puede leer, entonces, como el par ordenado (3,4).

Así, a cada número complejo corresponde uno y solamente un punto en el plano y recíprocamente a cada punto en el plano le corresponde uno y solamente un número complejo.

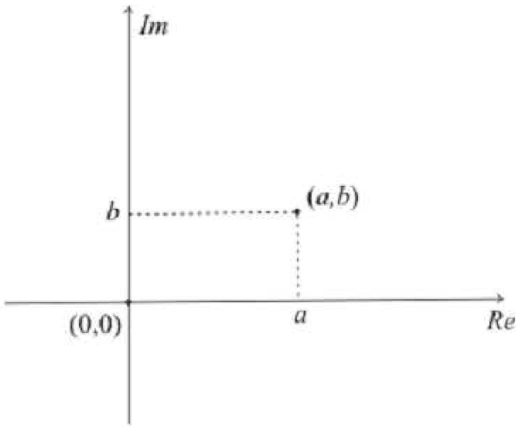



**Figura 1.-** Representación de un número complejo a+jb.

## 2.3 MÓDULO Y ARGUMENTO DE UN NÚMERO COMPLEJO

Si P es un punto en el plano complejo correspondiente al número complejo (a,b) o a+jb, entonces podemos definir el módulo, mod(z) o |z|, de dicho complejo de la siguiente forma:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

También podemos definir el argumento de este complejo, arg(z) o Φ(z), como el ángulo comprendido entre el eje de los reales y el radio vector que determina a |z|. El argumento se puede obtener mediante la siguiente expresión:

$$\varphi = \arg(z) = arc.tg\left(\frac{b}{a}\right)$$

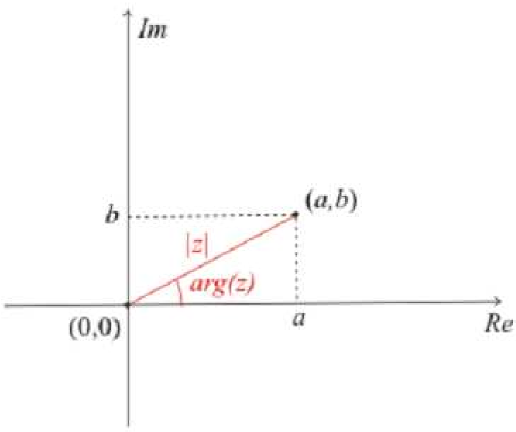



**Figura 2.-** Módulo y argumento de un número complejo.

Utilizando el módulo y argumento de un complejo encontramos una nueva forma de expresarlo, llamada forma polar:

$$z = x + jy = |z|\angle\varphi$$

Si quisiéramos convertir de la forma polar a la binómica debemos aplicar las siguientes formulas:

$$x = |z|.cos\varphi$$

$$y = |z|.sen\varphi$$

Otra forma de expresar un número complejo es la trigonométrica:

$$z = |z|.(cos\varphi + jsen\varphi)$$

Una forma equivalente a la trigonométrica es la llamada forma exponencial, que se obtiene mediante el empleo de la fórmula de Euler[2], la que establece que:

$$e^{j\varphi} = cos\varphi + jsen\varphi$$

Por lo tanto:

$$z = |z|.(cos\varphi + jsen\varphi) = |z|.e^{j\varphi}$$

Donde *e* = 2,71828… es una constante matemática conocida como *número de Euler* o *constante de Napier* y es también la base utilizada en el logaritmo natural o neperiano.

## 2.4 OPERACIONES ARITMÉTICAS CON NÚMEROS COMPLEJOS EN FORMA POLAR

1. **Producto:** la multiplicación de dos números complejos en su forma polar da como resultado un número complejo cuyo módulo es igual al producto de sus módulos y cuyo argumento es igual a la suma de los argumentos.

$$Z_1.Z_2 = |Z_1|.|Z_2|\angle(\varphi_1 + \varphi_2)$$

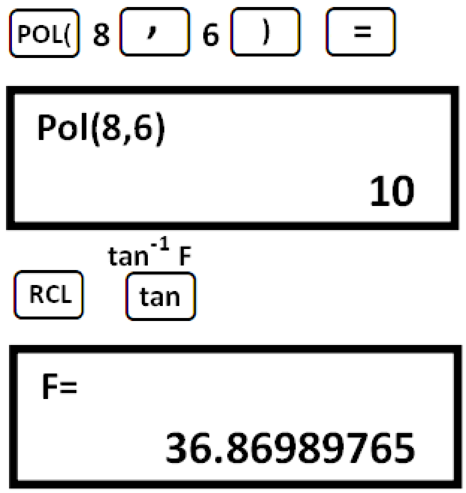
2. **Cociente:** la división de dos números complejos en su forma polar da como resultado un número complejo cuyo módulo es igual al cociente de sus módulos y cuyo argumento es igual a la resta de los argumentos.

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{|Z_1|}{|Z_2|}\angle(\varphi_1 - \varphi_2)$$

[2] La demostración de la formula de Euler escapa a los objetivos de este documento. Para ampliar en este tema se recomienda al lector que consulte material especifico.

## 2.5 USO DE LA CALCULADORA PARA EL PASAJE DE FORMA BINÓMICA A POLAR Y DE POLAR A BINÓMICA

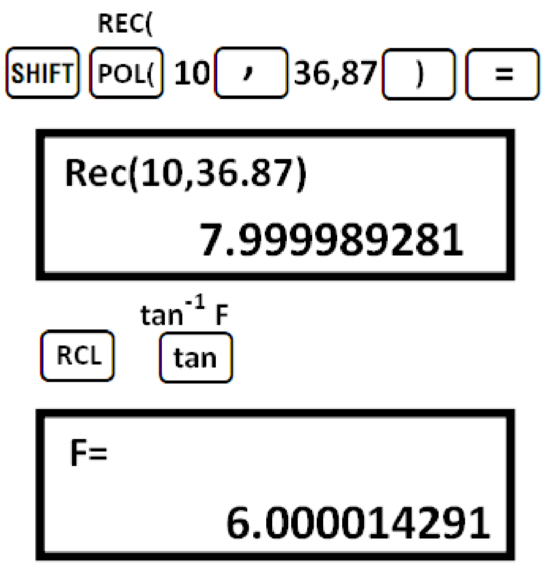
A través de un ejemplo se mostrará el uso de la calculadora para convertir un número complejo de su forma binómica a su forma polar. El número a convertir es **8 + j4**.




De esta manera obtenemos el módulo y argumento. Si ahora escribimos el número en su forma polar nos queda:

$$10\angle 36{,}87°$$

Ahora, para convertir un número a su forma binómica se debe seguir la siguiente secuencia. Continuando con ejemplo anterior:




De esta manera obtenemos la parte real y la parte imaginaria que le dan forma al número.

$$8 + j6$$